

ΜΑΘΗΜΑ 12

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σύνολο τιμών

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Βασικές συναρτήσεις

Ισότητα συναρτήσεων

Πράξεις με συναρτήσεις

Θεωρία – Σχόλια – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός του συνόλου τιμών, κατάλληλος για τις ασκήσεις

$f(D_f)$ λέγεται το σύνολο των y , για τα οποία η εξίσωση $y = f(x)$, με άγνωστο το x , έχει λύση (ρίζα) στο σύνολο D_f .

2.

Η γραφική παράσταση

- Γραφική παράσταση συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται η γραμμή C_f , η οποία σχηματίζεται από το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ του επιπέδου των αξόνων.
- Ο τύπος $y = f(x)$ της συνάρτησης λέγεται και **εξίσωση της γραμμής** C_f .
- Το πεδίο ορισμού D_f είναι η προβολή της C_f στον άξονα $x'x$.
- Το σύνολο τιμών $f(D_f)$ είναι η προβολή C_f στον άξονα $y'y$.
- Η C_{-f} είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.
- Οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σ' ένα σημείο.
- Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε το σύστημα
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{άρα την εξίσωση } f(x) = 0)$$
- Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $y'y$, λύνουμε το

$$\text{σύστημα } \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{άρα την εξίσωση } y = f(0))$$

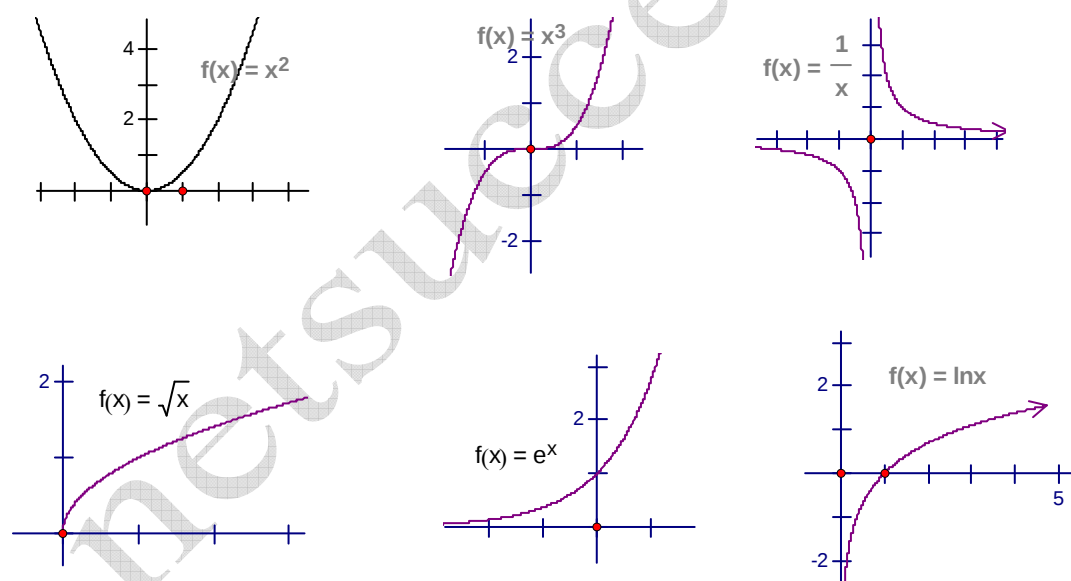
- Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f , C_g , λύνουμε το

$$\text{σύστημα } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (\text{άρα την εξίσωση } f(x) = g(x))$$

- Για να βρούμε τα x , για τα οποία η C_f είναι πάνω (αντίστοιχα κάτω) από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ (αντίστοιχα $f(x) < 0$).
- Για να βρούμε τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g , λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

3.

Μορφή των βασικών συναρτήσεων



4.

Ισότητα συναρτήσεων

- Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες** όταν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

5.

Πράξεις συναρτήσεων (μόνο όταν έχουν κοινό πεδίο ορισμού)

- Άθροισμα: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- Γινόμενο: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Πηλίκος: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Διευκρίνιση

Όταν γράφουμε « $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in A$ » σημαίνει ότι, σχηματικά η C_f είναι πάνω από τη C_g και όχι ότι, η συνάρτηση f είναι μεγαλύτερη από την g , το οποίο δεν έχει νόημα.

2.

Διευκρίνιση

Άλλο ίσες συναρτήσεις $f(x) = g(x)$ και άλλο η εξίσωση $f(x) = g(x)$

3.

Συμμετρία ως προς τον $y'y$

Αν $g(x) = f(-x)$, τότε οι C_g, C_f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

4.

Προσοχή

- Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x)g(x) = 0$,
δε σημαίνει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$
Σημαίνει ότι, για κάποιες τιμές του $x \in A$ θα είναι $f(x) = 0$
και για κάποιες τιμές του x θα είναι $g(x) = 0$
- Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $[f(x)]^2 = 1$,
δε σημαίνει ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in A$ ή $f(x) = -1$ για κάθε $x \in A$
Σημαίνει ότι, για κάποιες τιμές του $x \in A$ θα είναι $f(x) = 1$
και για κάποιες τιμές του x θα είναι $f(x) = -1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2x + 3$

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = 2x + 3$ με άγνωστο x και θέλουμε να έχει λύση στο $D_f = \mathbb{R}$.

$$y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R} = D_f$$

Επομένως, η εξίσωση έχει λύση, την $\frac{y-3}{2}$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Άρα } f(D_f) = \mathbb{R}$$

Γραφική λύση

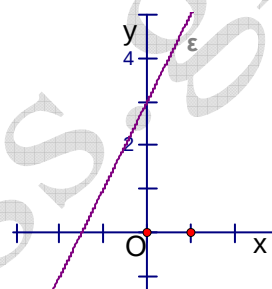
Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f ,

που είναι η ευθεία ε .

Προβάλλουμε τη C_f στον άξονα $y'y$.

Η προβολή αυτή είναι ο άξονας $y'y$, άρα $f(D_f) = \mathbb{R}$

Θεωρία 1



2.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = 2x + 3, x \in (-1, +\infty)$$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε την εξίσωση $y = 2x + 3$ με άγνωστο x και θέλουμε να έχει λύση στο $D_f = (-1, +\infty)$

$$y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Πρέπει, όμως, } x > -1 \Leftrightarrow \frac{y-3}{2} > -1 \Leftrightarrow y-3 > -2 \Leftrightarrow y > 1$$

$$\text{Άρα } D_f = (1, +\infty)$$

Γραφική λύση

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f ,

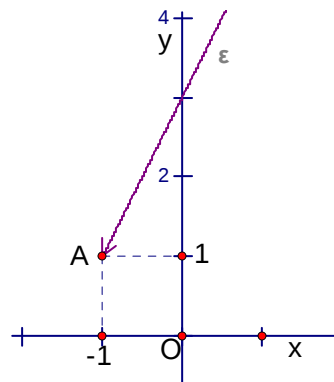
που είναι η ημιευθεία $A\varepsilon$ χωρίς την αρχή της A .

Προβάλλουμε τη C_f στον άξονα $y'y$.

Η προβολή αυτή είναι το διάστημα $(1, +\infty)$,

$$\text{άρα } f(D_f) = (1, +\infty)$$

Θεωρία 1



3.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 3$.

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = x^2 - x + 3$, με άγνωστο x και θέλουμε να έχει λύση στο $D_f = \mathbb{R}$.

$$\text{Η εξίσωση γίνεται } x^2 - x + 3 - y = 0.$$

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4(3 - y) \geq 0$$

$$1 - 12 + 4y \geq 0$$

$$4y \geq 11 \Leftrightarrow y \geq \frac{11}{4} \quad \text{Άρα } f(D_f) = \left[\frac{11}{4}, +\infty \right)$$

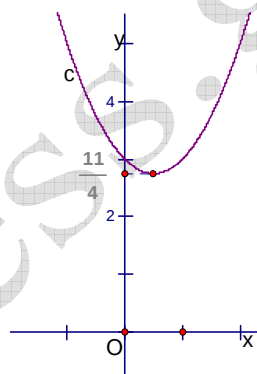
Γραφική λύση

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f , που είναι η παραβολή c .

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{1-2+12}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{Άρα } f(D_f) = \left[\frac{11}{4}, +\infty \right)$$



4.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = 2 - \sqrt{x-1}$.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = [1, +\infty)$.

Θεωρούμε την εξίσωση $y = 2 - \sqrt{x-1}$ με άγνωστο x και θέλουμε να έχει λύση στο A .

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y$$

$$\begin{cases} 2-y \geq 0 \\ x-1 = (2-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ x = 1 + (2-y)^2 \end{cases}$$

Η λύση $x = 1 + (2-y)^2$ υποχρεούται να ανήκει στο A , δηλαδή

$$x \geq 1 \Leftrightarrow 1 + (2-y)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (2-y)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει για κάθε } y \leq 2.$$

$$\text{Άρα } g(A) = (-\infty, 2]$$

5.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

$$y = \frac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow yx + 3y = 2x - 1$$

$$2x - yx = 3y + 1 \Leftrightarrow (2-y)x = 3y + 1 \quad (1)$$

- Όταν $2-y=0$, δηλαδή όταν $y=2$

$$\text{η (1) γίνεται } 0 \cdot x = 3 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 0 = 7 \text{ αδύνατη}$$

Άρα η τιμή 2 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών

- Όταν $2-y \neq 0$, δηλαδή όταν $y \neq 2$

$$\text{η (1) δίνει τη λύση } x = \frac{3y+1}{2-y}$$

$$\text{Πρέπει, όμως, } x \neq -3 \Leftrightarrow \frac{3y+1}{2-y} \neq -3$$

$$3y+1 \neq -6+3y$$

$$1 \neq -6 \text{ που ισχύει}$$

Άρα $f(A) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

6.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = 3 + \ln(x-2)$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = (2, +\infty)$

$$y = 3 + \ln(x-2) \Leftrightarrow y-3 = \ln(x-2)$$

$$x-2 = e^{y-3} \Leftrightarrow x = e^{y-3} + 2$$

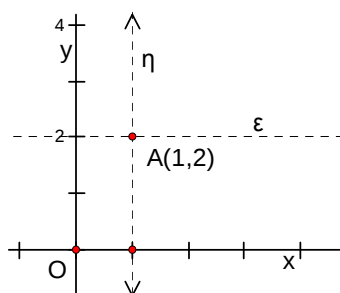
Πρέπει, όμως, $x > 2 \Leftrightarrow e^{y-3} + 2 > 2 \Leftrightarrow e^{y-3} > 0$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(A) = \mathbb{R}$

7.

Σε επίπεδο με σύστημα αξόνων χαράξτε ευθεία $\varepsilon \parallel x'x$ και ευθεία $\eta \parallel y'y$ που να διέρχονται από το σημείο $A(1, 2)$.

Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας ε και ποια της ευθείας η ;



Οι ευθείες ε , η είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ;

Προτεινόμενη λύση

Το τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της ευθείας ε έχει τεταγμένη $y = 2$.

Άρα η εξίσωση της ε είναι $y = 2$

Η ε είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, διότι η οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την ε σε ένα μόνο σημείο.

Το τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της ευθείας η έχει τετμημένη $x = 1$

Θεωρία 2

Άρα η εξίσωση της η είναι $x = 1$.

Η η δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, διότι η κατακόρυφη ευθεία από το A έχει άπειρα κοινά σημεία με την η .

8.

Χωρίς λόγια σχεδιάσε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = -x^2$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = -\sqrt{x}$$

$$f(x) = -e^x$$

$$f(x) = -\ln x$$

Απάντηση

Δες θεωρία 2 και 3

9.

Βλέποντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης να αναφέρεις το πεδίο ορισμού τους και το σύνολο τιμών τους.

Απάντηση

Για την $f(x) = 2x + 1$: $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}$

Για την $f(x) = x^2$: $\mathbb{R}$ και $[0, +\infty)$

Για την $f(x) = -x^2$: $\mathbb{R}$ και $(-\infty, 0]$

Για την $f(x) = x^3$: $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}$

Για την $f(x) = \frac{1}{x}$: $\mathbb{R}^*$ και $\mathbb{R}^*$

Για την $f(x) = -\sqrt{x}$: $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$

Για την $f(x) = e^x$: $\mathbb{R}$ και $(0, +\infty)$

Για την $f(x) = -e^x$: $\mathbb{R}$ και $(-\infty, 0)$

Για την $f(x) = \ln x$: $(0, +\infty)$ και $\mathbb{R}$

Για την $f(x) = -\ln x$: $(0, +\infty)$ και $\mathbb{R}$

10.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 6$ και $g(x) = x$. Να βρεθούν

- i) τα σημεία τομής τους με τους άξονες
- ii) τα σημεία τομής τους
- iii) τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 0 \end{cases}$$

Δες ΘΕΩΡΙΑ 2

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -6)$

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3, 0)$

$$\begin{cases} y = x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Άρα η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, 0)$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(0, 0) \equiv \Gamma(0, 0)$

ii)

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 6 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$$

Άρα οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $E(6, 6)$

iii)

$$C_f \text{ είναι πάνω από τη } C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2x - 6 > x \Leftrightarrow x > 6$$

11.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1$ και $g(x)=\ln(x-2)$ Να βρεθούν

- i) τα σημεία τομής τους με τους άξονες
- ii) τα σημεία τομής τους
- iii) τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 10

12.

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^3-1}{(x-1)^2}$, $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ είναι ίσες

Προτεινόμενη λύση

Για το D_f : Πρέπει $(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$\text{Άρα } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad (1)$$

Για το D_g : Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$\text{Άρα } D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(x) &= \frac{x^3-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1}{x-1} = g(x) \quad (3) \end{aligned}$$

Από τις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι οι f, g είναι ίσες.

13.

Για τις συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)^4$, $g(x) = 4 \ln(x-1)$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

Προτεινόμενη λύση

Για το D_f : Πρέπει να είναι $(x-1)^4 > 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$\text{Άρα } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1\}, \text{ είναι } f(x) &= \ln(x-1)^4 \\ &= \ln|x-1|^4 \\ &= 4\ln|x-1| = \begin{cases} 4\ln(x-1), & x > 1 \\ 4\ln(-x+1), & x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Για το D_g : Πρέπει $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$\text{Άρα } D_g = (1, +\infty)$$

Επομένως, για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) = 4\ln(x-1) = g(x)$,

ενώ για κάθε $x < 1$, η g δεν ορίζεται

Άρα το ζητούμενο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι το διάστημα $(1, +\infty)$

14.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

Προτεινόμενη λύση

Για το D_f : Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Για το D_g : Πρέπει να είναι $x \neq 0$

Άρα $D_g = \mathbb{R}^*$

Κοινό πεδίο ορισμού, το $A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in A, \text{ είναι } (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{x-1}{x} \\ &= \frac{x + (x-1)(x^2-1)}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{x + x^3 - x - x^2 + 1}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + 1}{x(x^2-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x-1}{x} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για να ορίζεται η συνάρτηση } \frac{f}{g}, \text{ πρέπει } g(x) &\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \\ &x-1 \neq 0 \\ &x \neq 1 \quad \text{που ισχύει} \end{aligned}$$

$$\text{Για κάθε } x \in A, \text{ είναι } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}$$

15.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2, \text{ να βρείτε τις } f, g.$$

Προτεινόμενη λύση

$$(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2 \Rightarrow [f(x)]^2 + [g(x)]^2 \leq 2[f(x) + g(x)] - 2$$

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 \leq 2f(x) + 2g(x) - 1 - 1$$

$$[f(x)]^2 - 2f(x) + 1 + [g(x)]^2 - 2g(x) + 1 \leq 0$$

$$[f(x) - 1]^2 + [g(x) - 1]^2 \leq 0$$

$$[f(x) - 1]^2 = 0 \text{ και } [g(x) - 1]^2 = 0$$

$$f(x) - 1 = 0 \text{ και } g(x) - 1 = 0$$

$$f(x) = 1 \text{ και } g(x) = 1$$